Dispensa n. 30

TERZA LEGGE DI KEPLERO

(a cura di Dino Orsucci)

[Disp. 28 e Disp. 29] Generalmente questa legge viene enunciata nella sua forma semplificata, valida nell'ambito del sistema solare:

I cubi delle distanze dei pianeti dal Sole sono proporzionali ai quadrati dei rispettivi periodi di rotazione

Questa "scoperta", conseguita del tutto empiricamente, consentì a Keplero di calcolare con precisione le distanze medie dal Sole (in Unità Astronomiche) di tutti i pianeti allora conosciuti. Restavano incerte le misure reali, in quanto non si conosceva la vera distanza Terra-Sole. Vediamo in pratica come si utilizza questa "legge". Se prendiamo in considerazione due pianeti che abbiano periodi orbitali P_1 e P_2 e rispettive distanze dal Sole D_1 e D_2, essa ci consente di impostare la seguente proporzione:

$$\mathbf{P_1^2 : P_2^2 = D_1^3 : D_2^3}$$

Esempio pratico:

Si calcoli la distanza media di Giove dal Sole, sapendo che il suo periodo di rivoluzione è di anni 11,86. La soluzione è facilitata se si prende la Terra come pianeta di riferimento, avendo essa il periodo di rivoluzione = 1 anno e distanza media dal Sole = 1 U.A. Pertanto la precedente proporzione diventa:

$$\mathbf{1^2 : 11{,}86^2 = 1^3 :} \boldsymbol{x}^3$$

da cui: $1 : 140{,}6596 = 1 : x^3$

$$x = \sqrt[3]{140{,}6586} = 5{,}2\,U.A.$$

A questo punto però è lecito domandarci: com'è possibile che nei calcoli non vengano considerate le rispettive masse dei pianeti? Se al posto di Giove ci fosse stato un pianetino di massa trascurabile, il periodo orbitale e la distanza sarebbero stati le stesse? La risposta va ricercata in una formulazione più "completa" di questa legge, universalmente valida ed ampiamente utilizzata in Astronomia, come per esempio nei calcoli inerenti alle stelle doppie, che molto spesso hanno masse non molto dissimili. Nell'ambito del sistema solare tale formula, che nell'esempio che segue considera il pianeta Terra ed il Sole, sarebbe:

$$k\frac{D^3}{P^2} = M_T + M_S$$

Precisiamo che: $\mathbf{M_T}$ è la massa della Terra, $\mathbf{M_S}$ quella del Sole, **D** è ovviamente la distanza tra i due corpi e **P** il periodo orbitale; **k** è invece una costante che, per distanze espresse in milioni di chilometri e periodi in giorni, vale circa **0,0398**. Per distanze espresse in UA e periodi in anni, **k** vale **1**.

Se utilizzeremo quest'ultime unità di misura, la formula ne risulta semplificata e diventa:

$$\frac{D^3}{P^2} = M_T + M_S$$

Volendo essere più precisi, per non creare in seguito confusione, aggiungiamo una "T" ai precedenti dati che riguardano la Terra:

$$\frac{D_T{}^3}{P_T{}^2} = M_T + M_S$$

Gli analoghi dati riferiti ad un altro pianeta, esempio Giove, saranno:

$$\frac{D_G{}^3}{P_G{}^2} = M_G + M_S$$

Sappiamo che nel sistema solare oltre il 99,8% della materia è concentrata nel Sole: ne deriva che le somme delle masse Terra+Sole e Giove+Sole, sono praticamente uguali. Sulla base di questa considerazione, le due equazioni possono condensarsi in un'unica formula:

$$\frac{D_T{}^3}{P_T{}^2} = \frac{D_G{}^3}{P_G{}^2}$$

che può essere scritta:

$$D_T{}^3 : P_T{}^2 = D_G{}^3 : P_G{}^2$$

Si sostituiscono ora i simboli T e G con 1 e 2:

$$D_1{}^3 : P_1^2 = D_2{}^3 : P_2{}^2$$

che è la stessa, scritta sotto altra forma, enunciata in principio in forma generica:

$$P_1^2 : P_2{}^2 = D_1{}^3 : D_2{}^3$$